

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x - \log x}{2x - \log x}$.

- Si determini il dominio I di f e si calcolino i limiti di f agli estremi di I .
- Si studi la monotonia di f , individuando eventuali estremi relativi e/o assoluti.
- Si trovi l'intervallo più grande contenente 1 in cui f è invertibile, e si scriva poi l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(f(1), 1)$.
- Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Esercizio 2. Si consideri la successione $(a_n)_{n \geq 1}$, dove $a_n := \frac{\pi/2 - \arctan n}{2(n-1)^2 + 1}$.

- stabilire se la successione è monotona o almeno definitivamente monotona.
- Determinare (se esistono) $\sup_n a_n$, $\inf_n a_n$, $\max_n a_n$, $\min_n a_n$ e $\lim_n a_n$.
- Nel caso in cui la successione abbia limite zero oppure $+\infty$, determinarne l'ordine (di infinitesimo o di infinito).

Esercizio 3. a) Determinare lo sviluppo di McLaurin del quarto ordine di

$$f(x) = \sin(x^2) + (\sin x)^2.$$

- Determinare lo sviluppo di McLaurin del quarto ordine di $g(x) = \log(\cos x)$.
- Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot f(x) + g(x)}{x^2}.$$