Esercizio 1. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sqrt[3]{(e^t-1)^2}\ \sin^2 t}{|t|^\alpha}\, dt$$

a) Determinare il dominio di f al variare del parametro reale α.

b) Sia $\alpha = 2$. Studiare esistenza e convergenza del seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

c) Sia $\alpha = 2$. Determinare il piú grande intervallo I in cui la funzione é invertibile e stabilire se la funzione inversa sia derivabile in tutto il suo dominio.

d) Sia $\alpha = 2$. Calcolare, al variare del parametro reale β, il seguente limite:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)}{(x-1)^\beta}$$

e) Calcolare, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)$$

essendo $y = y(x)$ la soluzione, se esiste, del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = -xy(x) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{(\arctan y)\log(1+|x+y|)}{\sqrt{e^{y^2} - \cos x}}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$;

d) stabilire se la funzione è differenziabile in $(1,-1)$.