Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\cos x)y(x) + \sin 2x \\ y(k) = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ammette una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) calcolare la soluzione (se esiste) nel caso $k = \pi/2$, determinando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Siano $g(x) = 1 + (1 + x)\ln x$ ed $f(x) = xe^x \ln x$.

a) Calcolare i limiti di g agli estremi del suo insieme di definizione.
b) Studiare la monotonia di g e determinare il numero di zeri di tale funzione.
c) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.
d) Studiare la monotonia di f e determinare il numero di zeri di tale funzione.

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = \sqrt[3]{xy} + e^{xy} - 1$.

a) Studiare la continuità di f nel suo insieme di definizione.
b) Verificare se f è differenziabile nel punto $(0, 0)$.
c) Se esiste, trovare il gradiente di f nel punto $P_0 = (-1, 1)$.
d) Verificare se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(P_0, f(P_0))$ e, in caso affermativo, scriverne l'equazione.