Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x+1} y(x) + e^{2x} \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione.

2) Sia ora $\alpha = -2$; determinare la soluzione (o le soluzioni), precisando il più grande intervallo in cui essa è definita.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x \arctan y} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nel suo insieme di definizione.

b) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

c) Se esistono, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$.

Esercizio 3. Dati $f(x,y) = x^2 - x - y^2 + y$ e l'insieme

$$A = \{(x,y) \ : 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2-x\}$$

a) Stabilire se esistono massimo assoluto e minimo assoluto di f in A.

b) Se esistono, determinare i punti di massimo assoluto e i punti di minimo assoluto di f in A.

c) Se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(P_0, f(P_0))$ con $P_0 = (0,0)$.