

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{\sin(|x| + |y|)}$$

- a) determinarne l'insieme di definizione e disegnarlo sul piano cartesiano;
- b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;
- c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0, 0)$;
- d) posto $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < \pi^2/2\}$, disegnare l'insieme A mettendolo in relazione con l'insieme di definizione di f di cui alla domanda a);
- e) alla luce della risposta alla domanda precedente, determinare $\inf_A f$, $\sup_A f$.

Esercizio 2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale lineare

$$(*) \quad (1 - k)y''(x) + y'(x) - \frac{2kx}{x^2 + 3}y(x) = x^2 + 3$$

- 1) Determinare l'ordine dell'equazione differenziale $(*)$ al variare del parametro k ;
- 2) per $k = 0$ determinare l'integrale generale (ossia l'insieme di tutte le soluzioni in \mathbb{R}) dell'equazione differenziale $(*)$;
- 3) per $k = 1$ determinare tutte le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione differenziale $(*)$ che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$.