Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x)/(2x) + \arctan\sqrt{|x|} \\ y(\alpha) = 1 \end{cases}$$

1) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

2) stabilire per quali valori di α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

3) sia ora $\alpha = 1$; determinare la soluzione (o le soluzioni), precisando il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui sono definite.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \int_2^x g(t)dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\arctan t} - 1}{t} & \text{se } t > 0 \\ \\ \dfrac{\arctan t}{\ln(1+t)} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

a) Trovare l'insieme di definizione I di f.

b) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.

c) Studiare i limiti di f agli estremi di I e disegnare il grafico di f.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } y > 0 \\ \arctan xy & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

a) Verificare se f è continua in $(0, 0)$.

b) Verificare se f è differenziabile in $(0, 0)$.

c) Se esistono, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$.