Esercizio 1. Sia data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4\alpha y'(x) + 4y(x) = e^{-2x}$$

essendo α un parametro reale.

a) Determinare gli eventuali valori del parametro α per i quali tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono limitate in $[0, +\infty)$.

b) Determinare l'integrale generale dell'equazione data nei casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Esercizio 2. Sia a una costante reale e sia

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \arctan x) + a & \text{se } x \geq 0, \\ \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1) Se esiste, determinare a in modo che f sia continua su tutto il suo insieme di definizione I.

2) Se esiste. determinare a in modo che f sia derivabile in $x_0 = 0$.

3) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione I.

4) Se per $x \geq 0$ f risulta invertibile, determinarne l'inversa.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)\arctan y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Se esiste, determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che f sia continua in $(0,0)$.

b) Se esiste, determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che f sia differenziabile in $(0,0)$.

c) Se esiste, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial Q}(P_0)$ con $Q = (-1,1)$ e $P_0 = (0,1)$.

d) Se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(P_0, f(P_0))$