Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -2(\tan x)y(x) + \sin x \\ y(k) = 0 \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) calcolare la soluzione (o le soluzioni) nel caso $k = \pi/4$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \int_2^x g(t)dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{t - \arctan t}}{\ln(1+t)} & \text{se } t < 1 \\ \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t-1}} & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità di g.
b) Determinare l'insieme di definizione I di f.
c) Studiare i limiti di f agli estremi di I.
d) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x+y) - e^{x+y} + x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nel suo dominio.
b) Determinare se esiste $\nabla f(0,0)$.
c) Calcolare, se esiste, $\dfrac{\partial f}{\partial Q}(\dfrac{\pi}{2}, 0)$ nella direzione del vettore $Q(3,4)$.