Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{(e^x - e)y\log|y|}{|x-1| + |\arctan y - \pi/4|}$$

a) determinarne l'insieme di definizione I_f;

b) negli eventuali punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione f non è definita, verificare se è prolungabile per continuità;

c) se nei punti $(0,0)$ e $(2,0)$ f risulta prolungabile, stabilire se in tali punti la funzione prolungata ammette le derivate parziali ed in caso affermativo calcolarle;

d) calcolare infine $(\partial f/\partial x)(0,1)$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \frac{e^{x+2}}{x+2}$$

• L'insieme di definizione di f è l'insieme $I =$.....................................

• Esiste $f'(x)$ per $x \in$................................ e si ha $f'(x) =$

• Esiste $f''(x)$ per $x \in$............................... e si ha $f''(x) =$

• Gli insiemi in cui f è crescente sono: ....

• Gli insiemi in cui f è decrescente sono: ....

• Esiste finito $\int_1^{+\infty} f(x)dx$? ☐ SI ☐ NO

Giustificazione:

• Esiste finito $\int_{-\infty}^{-4} f(x)dx$? ☐ SI ☐ NO

Giustificazione:

Sia k una costante reale e sia

$$g(x) = \begin{cases} k \arctan \dfrac{x}{4} & \text{se } x < -4, \\ \\ f(x) & \text{se } x \geq -4 \end{cases}$$

• La funzione g risulta continua in $x_0 = -4$ se $k =$ ....

• Per $x < -4$ si ha $g'(x) =$

• Esiste $g'(-4)$ per qualche valore di $k \in \mathbb{R}$?

☐ SI ☐ NO

Giustificazione:

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(y(x)+1)(y(x)+3)}{x} \\ y(1) = k \end{cases}$$

1) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, in modo che il problema dato abbia un'unica soluzione.
2) Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le eventuali soluzioni costanti del problema.
3) Se esiste, trovare la soluzione per $k = -2$ e specificarne l'insieme di definizione.