Esercizio 1. È data la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-xy)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di f e rappresentarlo.
b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) f è continua in I.
c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ (se ce ne sono) f è differenziabile in tutto I.
d) Nel caso in cui esista, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_o = (2,0)$.

Esercizio 2. Sia $F(x) = \int_{1/2}^{x} g(t)dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{t(t-1)}} & \text{se } t \leq 2, \\ e^{-t}\ln t & \text{se } t > 2 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità di g.
b) Determinare l'insieme di definizione I di F.
c) Studiare i limiti di F agli estremi di I.
d) Dove esiste, calcolare $F'(x)$ e studiare la monotonia di F.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\log x)y(x) + x^x \sin x \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale.
b) Stabilire per quali valori di α (se ne esistono) il problema ha una ed una sola soluzione.
c) Sia ora $\alpha = \pi/4$. Determinare, se esiste, la soluzione, precisandone il dominio.