

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \int_{-1}^x g(t) dt \quad \text{con} \quad g(t) = \frac{1}{(t+4)\sqrt[3]{e^{-t}-1+t}}$$

- 1) Determinare l'insieme di definizione di g ;
- 2) determinare l'insieme di definizione I di f e studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme I ;
- 3) dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- 4) disegnare il grafico di f .

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\sqrt{1+y^2(x)} \arctan x}{x^2 y(x)} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

- a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- c) determinare la soluzione nel caso $\alpha = 1$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \arctan x) + k & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan(1 + \ln x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- a) Trovare l'insieme di definizione di f e determinare per quali valori del parametro reale k la funzione f è continua in $x = 0$.
- b) Dove esiste, calcolare $f'(x)$.
- c) Sia $k = 0$. Studiare la monotonia di f .
- d) Sia $k = 0$. Trovare gli zeri di f .