Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^{(x+1)} & \text{se } x > -1 \\ ax + b & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

1) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definiziopne I.

2) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in tutto I.

3) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme di derivabilità di f e, dove esiste, calcolare $f'(x)$

4) Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione $f(x) - 1$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{\arctan xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } y > -x \\ e^{y \arctan x} - 1 & \text{se } y \leq -x \end{cases}$$

a) Trovare l'insieme di definizione I di f e verificare se f risulta continua e differenziabile in $(0,0)$.

b) Verificare se f risulta continua e differenziabile in $P_0 = (-1, 1)$.

c) Verificare se esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $P_1 = (-1, -1)$ e, in caso affermativo, scriverne l'equazione.

Esercizio 3. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_{-1}^{x} \frac{\sqrt[5]{\log |t|}}{(e^t - e)\sqrt{\arctan |t|}}\, dt$$

sulla base della teoria degli integrali impropri,

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) stabilire se esistono i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.