Esercizio 1. Per ogni $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ sia $f_{\alpha,\beta,\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\alpha x) + \ln(1+x^2) & \text{se } x \geq 0 \\ \beta|x+1| + \gamma & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(1) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia continua.
(2) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia derivabile in 0.
(3) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia derivabile su $\mathbb{R}$.
(4) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ ammetta primitive.
(5) Per $\alpha = \beta = 1$ e γ tale che la funzione $f_{1,1,\gamma}$ ammetta primitive, determinare, se esiste, la primitiva g tale che $g(0) = 0$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [4 + y^2(x)](x+1)\ln(x+1) \\ y(0) = k \end{cases}$$

essendo k un parametro reale,
a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
b) determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali esiste ed è unica la soluzione in un intorno del punto iniziale;
c) calcolare, se esistono, le soluzioni in un intorno del punto iniziale nei casi $k = 0$ e $k = 2$.