Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{(e^{|x+y|}-1)\log(1+|y|)}{\arctan(|x|+|y|)}$$

1) determinarne l'insieme di definizione;

2) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

3) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata ammette, in $(0,0)$, derivate parziali prime;

4) stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-x\sin y(x)}{\cos y(x)} \\ y(1) = k \qquad\qquad (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

a) Verificare per quali valori di k (se ce ne sono) il problema ammette un'unica soluzione.

b) Trovare per quali valori di k (se ce ne sono) il problema ha soluzioni costanti.

c) Determinare la soluzione del problema per $k = \pi/6$, specificandone l'insieme di definizione.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x} + \frac{1}{e^x}$$

a) Determinare l'insieme di definizione di f e studiare la monotonia di f.

b) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e/o assoluto di f.

c) Sia $g(x) = f(x)$ per $x > 0$. Verificare se g risulta invertibile in $(0,+\infty)$ e, in caso affermativo, trovarne la funzione inversa.