

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) := |x + 1|e^{-x/3}$$

- determinarne gli insiemi di definizione e di derivabilità;
- studiarne monotonia e punti di estremo relativo;
- studiarne convessità, flessi, asintoti;
- posto $a_n := f(n)$ ($n = 0, 1, \dots$), alla luce delle risposte precedenti determinare (se esistono)

$$\max_n a_n, \min_n a_n, \sup_n a_n, \inf_n a_n, \lim_n a_n$$

.

Esercizio 2. È data la seguente funzione:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n(1 - \ln x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

- Determinare i valori di $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ per cui esiste $f'_{n+}(0)$ e, per tali valori di n , calcolarla.
- Determinare i valori di $x > 0$ per cui la disequazione $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ è soddisfatta.
- Sia ora $n = 3$. Verificare che f_3 è invertibile in $[0, 1]$ e calcolare, se esiste, $(f_3^{-1})'(\frac{2}{e^3})$.

Esercizio 3. Siano $f(x) = (\sin x)^2 - e^{-x^2} + \cos x$ e $g(x) = x(\arctan x)$

- Scrivere gli sviluppi di McLaurin di f e di g di ordine 4 e determinare l'ordine di infinitesimo di tali funzioni, per $x \rightarrow 0$.
- Calcolare, al variare del parametro reale λ il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + g(x) + \lambda x^2}{x^2}$$