

Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_{-1}^x \frac{\sqrt[3]{\log |t|}}{[\arctan(t-1)]\sqrt{e^{|t|}-1}} dt$$

- a) tenendo presente la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;
- b) determinarne l'insieme di derivabilità; dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- c) studiarne i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-ax} - 1 + 2x}{x^2} + x & \text{se } x \neq 0 \\ b & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- i) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione f risulta continua in \mathbb{R} .
- ii) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b esiste $f'(0)$.
- iii) Calcolare $f'(x)$ per $x \neq 0$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \sqrt{1 - y^2(x)}, \\ y(1) = k \end{cases}$$

- a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare le eventuali soluzioni costanti del problema.
- b) Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni per $k = 0$.
- c) Determinare la soluzione (o le soluzioni) del problema per $k = 0$, specificandone l'insieme di definizione.