

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = xe^{-x} - k$ . Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- calcolare i limiti di  $f$  agli estremi del suo insieme di definizione,
- studiare la monotonia di  $f$  e calcolare, se esistono, il massimo assoluto e il minimo assoluto di  $f$ ,
- disegnare il grafico di  $f$  e specificare il numero degli zeri di  $f$ .
- Sia  $k = 0$ , determinare lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di  $f$  e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x} - x + x^2}{x^3}$$

**Esercizio 2.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} & \text{se } x > 0, \\ \arctan(xy) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- Stabilire se  $f$  è continua dove è definita;
- studiare la derivabilità di  $f$  in  $(0,0)$ ;
- studiare la differenziabilità di  $f$  in  $(0,0)$ .

**Esercizio 3.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{[1 + y^2(x)]x \log |x|}{y(x)} \\ y(-1) = \alpha \end{cases}$$

- stabilire per quali valori del parametro reale  $\alpha$  (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.
- Sia ora  $\alpha = -2$ ; determinare la soluzione (o le soluzioni).