

**Esercizio 1.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2[y^2(x) - 2y(x)]x \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

- a) stabilire per quali valori reali di  $k$  (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- 2) determinare (se esistono) la soluzione o le soluzioni nei casi  $k = 1$  e  $k = 2$ .

**Esercizio 2.** Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{1}{\sqrt[5]{\ln(1+t)} \sqrt[3]{e^t - e}} dt$$

- a) Determinarne l'insieme di definizione di  $f$ .
- b) Determinarne l'insieme di derivabilità di  $f$  e studiare la monotonia di  $f$ .
- c) Studiarne i limiti di  $f$  agli estremi del suo insieme di definizione.

**Esercizio 3.** Sia

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Sia  $\alpha < 0$ . Calcolare, se esiste,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
- b) Sia ora  $\alpha \geq 0$ . Calcolare, se esiste,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e, nel caso in cui  $f$  sia infinita, determinarne l'ordine.