Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, y(x) + x + |x| \\ y(\alpha) = 1 \end{cases}$$

a) dire di che tipo è l'equazione;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare l'insieme di definizione delle soluzioni al variare del parametro reale α;

d) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$;

e) stabilire di che classe è la soluzione di cui al punto precedente.

Esercizio 2. Sia

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{t+3} & \text{se } t < -1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt[3]{e^t - 1}}{\ln(1+t)} & \text{se } t > -1 \end{cases}$$

e sia $\quad f(x) = \int_2^x g(t)dt$

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor di g di ordine 2 nel punto $x_0 = -2$.

b) Determinare l'insieme di definizione I di f.

c) Studiare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione I.

d) Dove esiste, calcolare $f'(x)$.

e) Studiare la monotonia di f.

f) Trovare l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 2$.