

**Esercizio 1.** Date le funzioni

$$f(x, y) := \frac{y \arctan(x^2)}{x^4 + y^2}, \quad g(x, y) := f(x, y) \sin \sqrt{|y|}$$

- a) stabilire se  $f$  è limitata nel suo insieme di definizione;
- b) stabilire se la funzione  $g$  è prolungabile per continuità in  $(0, 0)$ ;
- c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in  $(0, 0)$ .

**Esercizio 2.** Siano  $a, b$  costanti reali e sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^a} - \frac{1}{2} & \text{se } x > 0, \\ b & \text{se } x = 0, \\ \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per i quali la funzione sia continua nel suo insieme di definizione.
- 2) Per i valori di  $a, b$  trovati al punto precedente, dove esiste, calcolare  $f'(x)$ .
- 3) Per  $a = 2$ , calcolare i limiti di  $f$  agli estremi del suo insieme di definizione.

**Esercizio 3.** Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2ay'(x) + (4 + a^2)y(x) = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

- 1) Determinare due soluzioni linearmente indipendenti.
- 2) Determinare l'integrale generale, specificando se risulta uno spazio vettoriale.
- 3) Determinare tutte le soluzioni che siano limitate in  $[0, +\infty)$ .
- 4) Sia  $a = 2$ , determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) - 4y'(x) + 8y(x) = e^{-2x}$$