Esercizio 1. Data la successione

$$a_n := \frac{1}{(n+1)\sqrt{n^2-2n+2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

1) stabilire se la successione è monotona o almeno definitivamente monotona;

2) determinare (se esistono)

$$\sup_n a_n, \ \inf_n a_n, \ \max_n a_n, \ \min_n a_n, \ \lim_n a_n;$$

3) nel caso in cui la successione abbia limite 0 o $+\infty$, determinarne l'ordine (di infinitesimo o di infinito).

Esercizio 2. Siano a, b, c costanti reali e sia

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{e^{-x}-1}{ax} & \text{se } x < 0, \\ 2 & \text{se } x = 0, \\ c + b\arctan 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1) Determinare, se esistono, i valori a, b, c per i quali la funzione sia continua in $\mathbb{R}$;

2) Al variare di a, b, c, dove esiste, calcolare $f'(x)$.

3) Calcolare, al variare di a, b, c, i limiti di f a $+\infty$ e a $-\infty$.

Esercizio 3. Siano

$$g(x) = (\arctan x)^2 \qquad \text{ed} \qquad f(x) = x^2(e^{\sin x} - e^{-\sin x}).$$

a) Verificare se g è una funzione pari e se f è una funzione dispari.

b) Sviluppare con la formula di McLaurin di ordine 4 le funzione g ed f.

c) Calcolare, al variare del parametro reale α, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{xg(x) - f(x)}{x^\alpha}$$