Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\arctan t - \pi/4}{\log|t| \sqrt[3]{e^t - e^2}} \, dt$$

a) alla luce della teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;

b) determinarne l'insieme di derivabilità;

c) studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x} \tan y(x) \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

1) Verificare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema dato ha un'unica soluzione.

2) Se esiste, trovare una soluzione per $\alpha = 0$.

3) Se esiste, trovare una soluzione per $\alpha = \pi/6$, specificandone l'insieme di definizione.

4) Verificare se per $\alpha = 3\pi/4$ la soluzione risulta localmente crescente e convessa.

Esercizio 3. Siano $g(x) = e^{-x} + x - k$ e $f(x) = \ln g(x)$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$:

1) Studiare monotonia e convessità di g.

2) Calcolare i limiti di g agli estremi del suo insieme di definizione.

3) Determinare il numero di zeri di g al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4) Se $k = 1$, verificare se f risulta definita ed invertibile in $(0, +\infty)$ e, in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto $y_0 = -1$.