

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{(e^x - 1) \log(1 + |y|)}{\sqrt{x^2 + \arctan(y^2)}}$$

- a) determinarne l'insieme di definizione;
- b) stabilire se essa è prolungabile per continuità in  $(0, 0)$ ;
- c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in  $(0, 0)$ ;
- d) calcolare, se esiste,  $f'_x(1, 1)$ .

**Esercizio 2.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x) - 1)(y(x) + 1) \\ y(2) = k \end{cases}$$

- i) Stabilire di che tipo è l'equazione.
- ii) Determinare per quali  $k \in \mathbb{R}$  (se ne esistono) il problema dato ammette una sola soluzione.
- iii) Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  determinare le soluzioni costanti del problema.
- iv) Trovare per quali  $k \in \mathbb{R}$  la soluzione del problema risulta localmente crescente e convessa.
- v) Per  $k = -2$ , trovare la soluzione del problema specificandone l'insieme di definizione.

**Esercizio 3.** Sia

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{1 - \ln x}}$$

- a) Determinare l'insieme di definizione  $I$  di  $f$  e calcolare i limiti di  $f$  agli estremi di  $I$ .
- b) Studiare la monotonia di  $f$ .
- c) Determinare gli eventuali zeri di  $f$ .
- d) Sia  $g$  tale che  $g(x) = f(x)$  per  $x \in (e, +\infty)$ . Trovare, se esiste, la funzione inversa  $g^{-1}$  di  $g$ .