Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{2y(x)+1} \arctan(x-1) \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione;

b) stabilire se esistono valori del parametro reale k per i quali il problema ha una soluzione costante;

c) calcolare la soluzione (se esiste) nel caso $k = -1$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2+1} & \text{se } x \geq -1 \\ k + \sqrt{1 + \ln x^2} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di f e verificare se f risulta continua in I al variare del parametro reale k.

b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dove esiste, calcolare $f'(x)$.

d) Se $k = -1$, studiare la monotonia della funzione f.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin y & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Verificare se f risulta continua e differenziabile in $(0,0)$.

b) Se esiste, calcolare il gradiente di f in $(0,1)$.

d) Se esiste, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, -\pi)$.