Esercizio 1. Per ogni α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ sia $f_{\alpha,\beta,\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) - \ln x & \text{se } x > 1 \\ \alpha & \text{se } x = 1 \\ \beta x + \gamma & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

(1) Determinare, se esistono, i valori di α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia continua.

(2) Determinare, se esistono, i valori di α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia derivabile.

(3) Scelti, se possibile, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia derivabile, determinare, se esistono, i due seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f_{\alpha,\beta,\gamma}(x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{f_{\alpha,\beta,\gamma}(x)}{(x-1)^2}$$

e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo di $f_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) := \sqrt{1-\cos(x-y)} + \frac{\arctan(xy)(e^{x+y}-1)}{x^2 - xy + y^2}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se essa è prolungabile per continuità nell'origine $(0,0)$;

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile nell'origine.