

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (1) Stabilire se f ammette punti di estremo relativo; in tal caso determinarli, precisando se si tratta di punti di minimo o di massimo, e se sono anche di minimo o di massimo assoluto.
- (2) Stabilire se esiste il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$$

ed in tal caso determinarlo.

- (3) Stabilire se f è limitata su \mathbb{R}^2 .
- (4) Stabilire se f è limitata su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$.
- (5) Stabilire se la funzione $\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, x) \in \mathbb{R}$ ammette punti di estremo relativo; in tal caso determinarli, precisando se si tratta di punti di minimo o di massimo, e se sono anche di minimo o di massimo assoluto.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\tan x)y(x) + \arctan(\sin x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- b) stabilire se il problema dato ha una ed una sola soluzione ed in caso affermativo determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui essa è definita;
- c) in caso di risposta affermativa alla domanda precedente, calcolare esplicitamente la soluzione.