Esercizio 1. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{-y^2(x)} \log(1+|x|)}{y(x)} \\ y(-1) = \alpha \end{cases}$$

a) Riconoscere di che tipo è l'equazione;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) calcolare la soluzione (se esiste) in un intorno del punto iniziale nel caso $\alpha = -1$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = |e^{x^3} - 3|$

1) Se esistono, determinare gli zeri di f.

2) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

3) Determinare l'insieme di derivabilità di f, calcolare f' in tutti i punti in cui esiste e studiare la monotonia di f.

4) Sia $g(x) = f(x)$ per $x < 1$. Se g è invertibile, determinarne l'inversa g^{-1}, specificandone insieme di definizione e immagine.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione

$$f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} + \cos y$$

a) Verificare se f è continua in $(0, 0)$.

b) Verificare se esistono $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

c) Verificare se f è differenziabile in $(0, 0)$.

d) Se esiste, calcolare il gradiente di f nel punto $P_0 = (1, 1)$