Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{|\sin(x+y)|\log(1+|x-y|)}{\sqrt{e^{x^2}+e^{-x^2}-2\cos y}}$$

a) [p. 2] Posto $\phi(x) := e^{x^2}+e^{-x^2}$, dimostrare che risulta $\phi(x) \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre $\phi(x) > 2$ se $x \neq 0$;

b) [p. 3] alla luce della risposta precedente, determinare l'insieme di definizione della funzione f;

c) [p. 4] stabilire se la funzione f è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

d) [p. 2] stabilire se la funzione f è continua nel punto $(1,1)$;

e) [p. 4] stabilire se la funzione f è differenziabile nel punto $(1,1)$

Esercizio 2. Per ogni $(\alpha,k) \in \mathbb{R}^2$ si consideri il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) = \dfrac{x[y(x)]^2+x}{y(x)} + kxe^{y(x)-1} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) [p. 3] stabilire per quali $(\alpha,k) \in \mathbb{R}^2$ (se ce ne sono) il problema $(*)$ ammette almeno una soluzione;

b) [p. 6] per $\alpha = -1$ e $k = 0$ determinare tutte le soluzioni massimali (ossia definite nel più grande intervallo possibile) del problema $(*)$, precisandone il dominio;

c) [p. 6] per $\alpha = 1$ e $k = -2$ determinare tutte le soluzioni massimali (ossia definite nel più grande intervallo possibile) del problema $(*)$, precisandone il dominio;