

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$\begin{cases} \ln(x^a + 1) & \text{se } x > 0 \\ \sin(bx) + e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(con  $a, b \in \mathbb{R}$ )

- 1) È vero che  $f$  è di classe  $C^\infty$  sia in  $(-\infty, 0)$  sia in  $(0, +\infty)$ ? Se sì, perché?
- 2) Stabilire per quali valori dei parametri reali  $a, b$  (se ce ne sono) la funzione è continua in 0;
- 3) Stabilire per quali valori dei parametri reali  $a, b$  (se ce ne sono) la funzione è derivabile in 0.

**Esercizio 2.** Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [y(x) + 1]^3 \arctan x \\ y(0) = k \end{cases}$$

- a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- b) stabilire per quali valori del parametro reale  $k$  (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
- c) Per  $k = -1$  e  $k = -2$ , trovare la soluzione del problema di Cauchy in un intorno di 0, determinando esplicitamente un intorno di 0 in cui tale soluzione è definita.