

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) := 4 \arctan \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 2)$$

- 1) Determinare eventuali simmetrie di f (e cioè se f è pari o dispari).
- 2) È vero che f è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$? Se sì, perché?
- 3) Calcolare, se esistono, i limiti di f per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$.
- 4) Studiare la monotonia e gli eventuali estremi assoluti e relativi di f , in particolare determinandone tutti i punti di massimo e minimo relativo e stabilendo quali tra essi sono punti di estremo assoluto.
- 5) Stabilire se f ammette degli zeri ed, in caso affermativo, determinarne il numero.

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (-1 + \cos x)y(x) + (x - 1)e^{\sin x}, \\ y(0) = k \end{cases}$$

- 1) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
- 2) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione massimale;
- 3) determinare il dominio della soluzione massimale di cui al punto precedente, al variare del parametro k ;
- 5) sia ora $k = -1$; determinare (se esiste) la soluzione massimale, o le soluzioni massimali, nel caso ve ne fosse più di una. (N.B. Scrivere l'espressione delle soluzioni nella forma più compatta possibile).