Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{(1+x^2)(1+\arctan|x|)} + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) individuare di che tipo è l'equazione;

b) determinare il più grande intervallo in cui esiste una ed una sola soluzione;

c) calcolare la soluzione(o le soluzioni).

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = e^{-x^2} - x^2 + 2$$

a) Calcolare i limiti della funzione agli estremi del suo insieme di definizione.

b) Studiare la monotonia di f.

c) Determinare il numero di zeri di f e, se esiste, un intervallo di ampiezza 1 che contenga almeno uno zero di f.

d) Verificare se f risulta invertibile in $(0,+\infty)$ e, in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione inversa di f nel punto $y_0 = e^{-4} - 2$.

Esercizio 3. Siano

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt[3]{t - \arctan t}\,(t-4)} & \text{se } t > 0 \\ \\ \dfrac{e^{2t}}{e^{2t}+1} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

ed $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$.

a) Determinare l'insieme di definizione della funzione f.

b) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

c) Dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.

d) Se esiste, calcolare $f(-1)$.