Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1/x) & \text{se } x < 0 \\ ax^2 + bx - \pi/2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

1) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua e derivabile nel punto 0.

2) Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua e derivabile nel punto 1.

3) Esistono valori dei parametri reali a, b per i quali f risulti continua e derivabile sia in 0 che in 1?

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - 1 + \sin y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x.y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x.y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Verificare se f è continua nel suo insieme di definizione I.

b) Verificare se f è differenziabile in (0,0).

c) Se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (-1, 0)$.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x[y^2(x) + 4y(x) + 5]}{x^2 + x - 2} \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire per quali valori reali di k (se ce ne sono) esiste ed è unica la soluzione del problema;

b) sia ora $k = 0$; calcolare (se esiste) la soluzione, determinando altresì un intervallo in cui è certamente definita.