

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y \sin x + x \arctan y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ k & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) determinare gli eventuali valori di k per i quali la funzione sia continua nel suo insieme di definizione;
- b) per i valori di k di cui al punto precedente, stabilire se la funzione ammette le derivate parziali in $(0, 0)$;
- c) per gli eventuali valori di k di cui al punto precedente, stabilire se la funzione è differenziabile in $(0, 0)$;
- d) stabilire se la funzione è limitata nel suo insieme di definizione;
- e) stabilire se esiste, ed in caso affermativo calcolare, il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$.

Esercizio 2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale lineare

$$(*) \quad (1/4)(k - 1)y''(x) + y'(x) - y(x) = e^{kx}/(kx^2 + 1)$$

- a) Determinare l'ordine dell'equazione differenziale $(*)$ al variare del parametro reale k ;
- b) per $k = 0$ determinare tutte le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione differenziale $(*)$;
- c) per $k = 0$ determinare tutte le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione differenziale $(*)$ che soddisfano le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$;
- d) per $k = 1$ determinare tutte le soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione differenziale $(*)$ che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$.