

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) := \begin{cases} x^a(e^x - 1) & \text{se } x > 0, \\ x\sqrt{x^2 + 1} - x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

essendo  $a$  un parametro reale.

- 1) È vero che  $f$  è di classe  $C^\infty$  sia in  $(0, +\infty)$  sia in  $(-\infty, 0)$  per qualunque  $a \in \mathbb{R}$ ? Se sì, perché?
- 2) Stabilire per quali  $a \in \mathbb{R}$  (se ce ne sono) la funzione  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$ .
- 3) Stabilire per quali  $a > 0$  (se ce ne sono) la funzione  $f$  è iniettiva.
- 4) Stabilire per quali, tra i valori di  $a$  di cui al punto 3) (se ce ne sono), si ha che  $f^{-1}$  è derivabile in  $e - 1$  e si ha  $(f^{-1})'(e - 1) = 1/(e + 1)$ .

**Esercizio 2.** Sia data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \frac{\sqrt{|\arctan t - \pi/4|}}{(1 + t^2) \ln |t|} dt$$

- a) determinarne l'insieme di definizione;
- b) determinarne l'insieme di derivabilità;
- c) studiare i limiti della funzione  $f$  agli estremi del suo insieme di definizione, precisando, in caso di esistenza, se valgono  $+\infty$ ,  $-\infty$  o se sono finiti.