Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (1+\sin x)y(x) + e^{-\cos x}|x| \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;
b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione e trovarne l'insieme di definizione;
c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se possibile) nel caso $k = -1$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\arctan x) + a & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{4}{\pi}(\arctan x) - b & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

i) Al variare dei parametri reali a e b determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità di f.
ii) Trovare l'insieme di derivabilità di f al variare dei parametri a e b, e calcolare f' dove esiste.
iii) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione f risulta crescente nel suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y \geq |x| \\ \dfrac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } y < |x| \end{cases}$$

a) Verificare se la funzione f risulta prolungabile per continuità in $(0,0)$ e in caso affermativo verificare se la funzione così prolungata risulta differenziabile in $(0,0)$.
b) Verificare se la funzione f risulta continua e differenziabile in $P_0 = (-2,2)$.
d) Se esiste, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(P_1, f(P_1)$ con $P_1 = (-1,2)$.