Esercizio 1. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (-1/x)y(x) + \arctan\sqrt{x-1} \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

a) Dire di che tipo è l'equazione differenziale.

b) Stabilire per quali eventuali valori dei parametri reali $\alpha,\ \beta$ il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.

c) Sia ora $\alpha = 2,\ \beta = 0$; determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni).

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) := e^{\alpha x} + e^{-x} + \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

a) Per ogni α, β reali si calcoli (se esiste) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) Per ogni α, β reali per i quali $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, si calcoli (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.

c) Per $\alpha = 3$ e $\beta = 0$ provare che $f(1/2) > 3$. (Suggerimento: usare la formula di Taylor col resto di Lagrange).