Esercizio 1. Data la successione

$$a_n := \sqrt{n^2+4n+5} - n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

a) stabilire se essa è monotona o almeno definitivamente monotona;
b) calcolare, se esistono:

$$\min_n a_n, \quad \max_n a_n, \quad \inf_n a_n, \quad \sup_n a_n, \quad \lim_n a_n;$$

c) detto $\ell = \lim_n a_n$ (se esiste), calcolare l'ordine di infinitesimo di $b_n := a_n - \ell$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = e^{-x^2} - \cos x + kx \sin x$$

1) Applicando gli opportuni sviluppi di Taylor o Mac Laurin, determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$.
2) Per $k = 2$, calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 3x^2/2}{x^\alpha}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x) - 3x^2/2}{x^\alpha}$$

Esercizio 3. Siano a, b costanti reali e sia

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + bx & \text{se } x \leq 0, \\ \\ 1 - x^2 \ln x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1) Studiare la continuità di f nel suo insieme di definizione al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, dove esiste, calcolare $f'(x)$.
3) Detta g la restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$, studiare la monotonia di g, verificare se g è invertibile in $(1, +\infty)$ e, in caso affermativo, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_o = 1 - e$.
4) Studiare la convessità o concavità di g e disegnarne il grafico.