

**Esercizio 1.** Sia data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \sqrt{\arctan(xy)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\log(1 + 2x^2 + y^2)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) determinarne l'insieme di definizione;
- b) stabilire se la funzione è continua in  $(0, 0)$ ;
- c) stabilire se la funzione è differenziabile in  $(0, 0)$ .

**Esercizio 2.** Siano  $a, b$  costanti reali e sia

$$f(x) := \begin{cases} xe^{\frac{1}{\ln x}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ ax + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per i quali la funzione sia continua e derivabile nel suo insieme di definizione e, dove esiste, calcolare esplicitamente  $f'$
- 2) Sia  $g(x) = f(x)$  per  $x > 0$ . Studiare la monotonia di  $g$  e disegnarne il grafico.

**Esercizio 3.** Data l'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y(x) = 2x - e^{-x}$$

- 1) Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, specificando se si tratta di uno spazio vettoriale e di quale dimensione.
- 2) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata che siano limitate in  $[0, +\infty)$ .
- 3) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
- 4) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che  $y(0) = 5/6$ .