

Esercizio 1. Data la funzione $f(x) := (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x$

- a) [p. 2] calcolarne i limiti agli estremi del suo insieme di definizione I ;
- b) [p. 2] studiarne gli insiemi di crescita e decrescenza;
- c) [p. 3] posto $a_n := f(n + 1)$ ($n \in \mathbb{N}$), calcolare, se esistono,

$$\max_n a_n, \quad \min_n a_n, \quad \sup_n a_n, \quad \inf_n a_n, \quad \lim_n a_n$$

- d) [p. 5] detta g la restrizione di f all'intervallo $[2, +\infty)$, stabilire se la funzione g è invertibile, ed in caso affermativo determinarne esplicitamente l'inversa, precisandone dominio ed immagine;
- e) [p. 3] posto $\phi(x) := f(x) \sin(x^2 - 1)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di ϕ per $x \rightarrow 1$.

Esercizio 2. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) := e^{-x/2} - \cos \sqrt{x}$.

- 1) Stabilire se f è derivabile in $[0, +\infty)$;
- 2) per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$ calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)/x^\alpha$ (Suggerimento: usare la formula di Mac Laurin per esponenziale e coseno);
- 3) determinare (se esiste) l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 0^+$;
- 4) provare che $f(x) > 1 - x/2 \forall x \in (0, +\infty)$.