Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{e^{-y^2(x)} \arctan x}{y(x)} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) dire di che tipo è l'equazione;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione;

c) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = -1$.

Esercizio 2. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_1^x g(t)\, dt \qquad \text{con} \quad g(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t \sqrt[3]{\arctan(1+t)}}$$

a) Determinarne l'insieme di definizione I di f.

b) Studiare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione I.

c) Dove esiste, calcolare $f'(x)$.

d) Studiare la monotonia di f.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \arctan xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Se esistono, trovare i valori del parametro reale k per i quali f risulti continua in $(0,0)$.

b) Studiare l'esistenza delle derivate parziali di f e la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$

c) Se esiste, calcolare il gradiente di f nel punto $(1,1)$.