Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x)/(x^2-1) + (1-x)e^x \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire qual è il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui esiste ed è unica la soluzione al variare del parametro reale k;

c) calcolare, se esiste, la soluzione nel caso $k = 1$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \int_{-1}^{x} g(t)\,dt$ con

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{t})}{\sqrt[3]{e^t - 1 - t}} & \text{se } t > 0, \\ \ln|t| & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

1) Determinare l'insieme di definizione di f e studiare i limiti di f agli estremi dell'insieme di definizione.

2) Calcolare, dove esiste, $f'(x)$ e studiare la monotonia di f.

4) Se esistono, calcolare esplicitamente $f(-2)$ ed $f(0)$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\arctan(1-e^{xy})}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x > 0, \\ 1 - e^{\arctan xy} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

b) Studiare la differenziabilità di f in (0,0).

c) Se esiste, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se $x > 0$.

d) Se esiste, calcolare $\frac{\partial f}{\partial Q}(-1,1)$ con $Q = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.