

**Esercizio 1.** Siano  $a, b$  costanti reali,  $a \neq 0$  e sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x}}{a} & \text{se } x > 0, \\ 3/2 & \text{se } x = 0, \\ \frac{x}{1+x^2} + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per i quali la funzione sia continua in  $\mathbb{R}$ .
- 2) Al variare di  $a, b$ , dove esiste, calcolare  $f'(x)$ .
- 3) Siano  $a = 2, b = 0$ . Calcolare esplicitamente  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , specificando se  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = x + e^{-2x}$$

- 1) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, specificando se costituiscono uno spazio vettoriale e di quale dimensione.
- 2) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
- 3) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione data tali che  $y(0) = 1$ .

**Esercizio 3.** Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{\sqrt{1 - \cos y} \arctan(|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- a) determinarne l'insieme di definizione;
- b) stabilire se essa è prolungabile per continuità in  $(0, 0)$ ;
- c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata ammette le derivate parziali in  $(0, 0)$  e se possibile calcolarle;
- d) stabilire se la funzione prolungata come sopra è differenziabile in  $(0, 0)$ .