Esercizio 1. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2(\tan x)y(x) + (\sin x)^2 \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

a) Riconoscere di che tipo è l'equazione;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) sia ora $\alpha = (3/2)\pi$; determinare il più grande intervallo, contenente il punto iniziale, nel quale esiste ed è unica la soluzione;

d) calcolare la soluzione di cui al punto c).

Esercizio 2. Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 + x - ky + 1$$

a) Per quali valori del parametro reale k la funzione ha in $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ un punto critico?

b) Per tali valori si stabilisca se il punto $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ è un punto di minimo locale o massimo locale o sella.

c) Sia $k = 1$. Stabilire se la funzione è limitata.

d) Sia $k = 0$. Determinare, se esistono, gli estremi globali di f in
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 = 1\}$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x - e^x - k}$$

a) Per quali valori del parametro reale k la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$?

b) Sia $k = 1$. Tracciare, motivandolo, il grafico della funzione.

c) Sia $k = 1$. Trovare, se esiste, un intorno di $x_0 = 1/2$ in cui la funzione $g(x) = |f(x)|$ risulti invertibile.

d) Sia $k = 1$. Calcolare, se esiste, $(g^{-1})'(1/(1 + 2\sqrt{e}))$.