

Esercizio 1. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_2^x \log[1 + (\arctan t)^2]/(e^t - 1 - t) dt$$

- Determinare l'insieme di definizione di f e studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;
- dove esiste, calcolare $f'(x)$ e studiare la monotonia di f ;
- disegnare il grafico di f ;
- determinare l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow 2$;
- calcolare, se esiste, il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = |x| \sqrt{\frac{y(x)}{y(x)+1}} \\ y(0) = -4/3 \end{cases} .$$

- Studiare esistenza ed unicit  locale della soluzione.
- Tracciare un grafico qualitativo della soluzione in un intorno del punto iniziale.
- Stabilire se la soluzione sia derivabile 2 volte in $x_0 = 0$.
- Calcolare, al variare del parametro reale k , il limite (se esiste):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(y(x) + 4/3)^k}{x - \sin x}$$

- Determinare, se esistono, gli estremi globali di $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 1$ nell'insieme:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + |y| - 1 \leq 0\}$$