

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{1}{x} + \log x - (1 + \log x)^2$.

- (a) Determinare il dominio I di f e calcolare i limiti di f agli estremi di I .
- (b) Studiare la monotonia di f , determinandone eventuali punti di estremo relativo e/o assoluto ed eventuali zeri.
- (c) Calcolare, se esiste, $\int_1^2 f(x) dx$.

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin |2x| \\ y(\alpha) = -1. \end{cases}$$

- (a) Dire di che tipo è l'equazione e stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.
- (b) Determinare l'insieme di definizione delle soluzioni al variare del parametro reale α .
- (c) Determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$. (N.B. La soluzione va espressa nel modo più conciso possibile).
- (d) Stabilire se la soluzione di cui al punto precedente ammette derivata seconda nell'origine.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x}{x^2 + 9y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) La funzione è limitata?
- (b) Esistono punti di minimo e massimo globali?
- (c) Determinare, se esistono, punti di massimo e minimo locali.
- (d) Determinare, se esistono, punti di minimo e massimo globali della funzione nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + 9y^2 \leq 16\}$.