Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

a) [p.ti 2]. Si tracci il grafico della funzione studiando in particolare continuità e derivabilità.

b) [p.ti 2]. Si trovi un'opportuna restrizione della funzione in modo tale che risulti invertibile e scrivere un'espressione analitica esplicita della funzione inversa.

c) [p.ti 3]. Determinare, se esiste, il polinomio di Taylor del primo ordine della funzione centrato in $x_0 = 3/2$.

d) [p.ti 3]. Calcolare, al variare del parametro reale positivo k, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3/2+} \frac{(f(x) - \pi/3)^3}{(x-3/2)^k}.$$

Esercizio 2. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = [1 + 4y^2(x)] \arctan\sqrt{|x|} \\ y(\alpha) = 0 \end{cases}$$

a) [p. 2] Riconoscere di che tipo è l'equazione e stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

b) [p. 2] stabilire se esistono, per qualche valore del parametro reale α, soluzioni costanti del problema;

c) [p. 6] sia ora $\alpha = 1$; calcolare le eventuali soluzioni in un intorno del punto iniziale.

Esercizio 3. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_{-1}^{x} \frac{\sqrt[5]{1-e^t}\,\log|t|}{(t^2+t-2)\sqrt{|t| - \log(1+|t|)}}\,dt$$

a) [p. 5] determinarne l'insieme di definizione;

b) [p. 3] determinarne l'insieme di derivabilità;

c) [p. 2] studiarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.