

Esercizio 1. Sia $f(x) := x \ln x - x$.

- Scrivere lo sviluppo di Taylor, con resto di Lagrange di ordine n in $x_0 = 1$ della funzione f .
- Trovare un polinomio che approssimi f su $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ a meno di 10^{-4} .
- Determinare l'ordine di infinitesimo di $g(x) = \cos(x - 1) + f(x)$ per $x \rightarrow 1$.

Esercizio 2. Studiare e tracciare il grafico della funzione:

$$y(x) := \int_{-1}^x (\arctan(t^2 - t))^{-1/3} dt,$$

determinando in particolare:

- dominio, insieme di continuità di y e limiti agli estremi del dominio,
- derivata e monotonia di y ,
- intervalli di convessità e/o concavità.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = |\tan x|y(x) + \cos^2 x, \\ y(\pi) = \alpha \end{cases}$$

- discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α , precisando il più grande intervallo in cui le soluzioni del problema sono definite;
- determinare, se esiste, la soluzione nel caso $\alpha = 0$.