Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} \log(1 + |x|), \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) stabilire, per ogni valore reale del parametro α, se esiste una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.

b) Sia ora $\alpha = -1$; calcolare, se esiste, la soluzione.

Esercizio 2. Si consideri la funzione:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-x} + \ln(1-x) & \text{se } x \le 0, \\ x^2 + a|x-1| + b & \text{se } x > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) per cui f risulti continua in $\mathbb{R}$.

b) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) per cui f risulti derivabile in $x = 0$.

c) Tracciare il grafico di f in corrispondenza dei valori dei parametri determinati ai punti precedenti.

Esercizio 3. Sia

$$y(x) := \begin{cases} \dfrac{\ln(\arctan x + 1)}{(1+x^2)(\arctan x + 1)^2} & \text{se } x \ge 0, \\ \dfrac{x}{(x-1)(2x^2+1)} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determinare, se esistono, tutte le primitive di y in $\mathbb{R}$.

b) Calcolare la primitiva g di y tale che $g(1) = 0$.