

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)/\tan x + e^{-x} \sin(2x), \\ y(-\pi/4) = 0 \end{cases}$$

- stabilire di che tipo è l'equazione;
- discutere esistenza ed unicità della soluzione in un intorno del punto iniziale, determinando il più grande intervallo in cui essa è definita;
- determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni).

Esercizio 2. Siano $g(x) := e^x - 1 - x^2$ ed $f(x) := \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt[3]{t^5 - t}} dt$.

- Stabilire il segno di g .
- Disegnare il grafico di f , precisandone: il dominio, l'insieme di continuità e di derivabilità, i limiti agli estremi e la monotonia.

Esercizio 3. a) Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^x - e^{x^2}}{x^\alpha}$$

- Sia ora $h(x) = (1+x)^x$. Stabilire se h è invertibile in $[0, +\infty)$ e, in caso affermativo, calcolare, se esistono, $(h^{-1})'(9)$ e $(h^{-1})''(9)$.