Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) + 2/y(x)}{\sqrt{4x - x^2}} \\ y(2) = \alpha \end{cases}$$

a) individuare il tipo dell'equazione differenziale;

b) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α;

b) determinare, se esiste, la soluzione nel caso $\alpha = -2$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2\, e^{\sin x} - \ln(1 + x^2) + k\, x^2}{\sqrt{1 - a\, x^2} - 1}$$

a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, al variare di $k, a \in \mathbb{R}$

b) Detta

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{e^x}{\sqrt{|x|}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $k, a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} g(x)\, dx$ è convergente

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 + |x - y + 1|$

a) Stabilire se f è derivabile nel punto $P_o(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

b) Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x - y + 1 \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} : x - y + 1 < 0,\, x \geq -1,\, y \leq 1\}$.
Dopo aver verificato che f ha in T massimo e minimo assoluto, calcolarli.